📘 الموسوعة الشاملة

التكامل بالتعويض VS التكامل بالأجزاء

الرياضيات - الصف الثاني عشر (المنهاج الأردني)

د. أيمن القهوجي

خبير تعليم الرياضيات - متخصص في التكامل

24 مثال محلول

50 سؤال محلل

7 جداول مقارنة

3 حالات خاصة

📑 جدول المحتويات التفصيلي

دليل سريع

1 التكامل بالتعويض
2 التكامل بالأجزاء
3 جدول المقارنة الشامل
4 قواعد الاختيار
5 أمثلة مقارنة
6 حالات خاصة

القسم الأول: التكامل بالتعويض (Integration by Substitution)

الدرس 2 - صـ 26

التكامل بالتعويض

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad , \quad u = g(x)$$

📌 **الفكرة الأساسية:** تبسيط التكامل بتغيير المتغير إلى u حيث $u = g(x)$ ونحول dx إلى du.

🔍 متى نستخدم التكامل بالتعويض؟

- ✅ عندما نرى اقتراناً ومشتقته داخل التكامل (صـ 27).
- ✅ التكاملات التي تحتوي على $\sqrt{ax+b}$ أو جذور أخرى (صـ 32).
- ✅ تكاملات الاقترانات المثلثية المرفوعة لأس فردي (صـ 35).
- ✅ التكاملات من الشكل $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ (صـ 15).
- ✅ التكاملات التي تحتوي على $e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

الخطوة 1
حدد $u = g(x)$ (الجزء الداخلي من الاقتران المركب).

الخطوة 2
احسب $du = g'(x)dx$.

الخطوة 3
عوض في التكامل ليصبح كله بدلالة u و du.

الخطوة 4
أوجد التكامل الجديد (بالنسبة لـ u).

الخطوة 5
عوض عائداً إلى x باستخدام $u = g(x)$.

📘 مثال 1 (صـ 28 - 1/1):

$$\int 6x^2(2x^3-3)^4dx$$

عرض الحل بالتفصيل

📘 مثال 2 (صـ 28 - 1/2):

$$\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$$

عرض الحل

📘 مثال 3 (صـ 28 - 1/3):

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

عرض الحل

📘 مثال 4 (صـ 30 - 2/1):

$$\int x\sqrt{2x+5} \, dx$$

عرض الحل

✂️ القسم الثاني: التكامل بالأجزاء (Integration by Parts)

الدرس 4 - صـ 58

✂️ التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

📌 **الفكرة الأساسية:** اشتقاق قاعدة ضرب الاقترانين: $(uv)' = u'v + uv' \rightarrow$
$uv' = (uv)' - u'v$.

🔍 متى نستخدم التكامل بالأجزاء؟

- ✅ عندما يكون التكامل حاصل ضرب اقترانين مختلفين (صـ 58).
- ✅ التكاملات التي تحتوي على $\ln x$ (صـ 60).
- ✅ كثير حدود × اقتران أُسّي: $\int x^n e^{ax}\,dx$ (صـ 61).
- ✅ كثير حدود × اقتران مثلثي: $\int x \sin ax\,dx$.
- ✅ تكاملات دورية مثل $\int e^x \cos x dx$ (صـ 63).

الخطوة 1

حدد u و dv (اختر u الذي يبسط بالاشتقاق).

الخطوة 2

احسب du و $v = \int dv$.

الخطوة 3

طبق الصيغة: $\int udv = uv - \int vdu$.

الخطوة 4

إذا كان التكامل الجديد أبسط، أكمل. وإلا كرر العملية.

📊 أولوية اختيار u (طريقة LIATE):

1. L — لوغاريتمي: $\ln x$
2. I — معكوس مثلثي: $\arcsin x$
3. A — جبري (كثير حدود): x^n
4. T — مثلثي: $\sin x, \cos x$
5. E — أُسّي: e^x

📘 مثال 1 (صـ 59 - 1/1):

$$\int x \cos x \, dx$$

عرض الحل

📘 مثال 2 (صـ 60 - 1/2):

$$\int \ln x \, dx$$

عرض الحل

📘 مثال 3 (صـ 61 - 1/4):

$$\int xe^{3-x}dx$$

عرض الحل

📘 مثال 4 (صـ 62 - 2):

$$\int x^2e^{2x}dx$$

(تكرار الأجزاء) **عرض الحل**

⚖️ جدول المقارنة الشامل بين الطريقتين

تحليل متعمق

🧩 مقارنة تفصيلية من 12 بُعد

عنصر المقارنة	التكامل بالتعويض (Substitution)	التكامل بالأجزاء (Parts)
📌 الصيغة العامة	$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$	$\int udv = uv - \int vdu$
🎯 الفكرة الجوهرية	تبسيط التكامل بتغيير المتغير	تحليل التكامل باستخدام قاعدة ضرب الاقترانين
🔍 متى نستخدم؟	وجود اقتران ومشتقته جذور $\sqrt{ax+b}$ اقترانات مثلثية بأس فردي صورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$	حاصل ضرب اقترانين وجود $\ln x$ كثير حدود × أُسّي/مثلثي تكاملات دورية
📄 أمثلة من الكتاب	ص 28: $\int 6x^2(2x^3-3)^4dx$ ص 30: $\int x\sqrt{2x+5}dx$ ص 32: $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$	ص 59: $\int x\cos x dx$ ص 60: $\int \ln x dx$ ص 62: $\int x^2e^{2x}dx$
📈 عدد المرات	عادة مرة واحدة كافية	قد نحتاج للتكرار (مرتين أو أكثر) أو تكرار دوري

🧠 كيفية اختيار u	$u = g(x)$ (الجزء الداخلي)	u يُختار ليبسط بالاشتقاق (LIATE)
⚡ السرعة	سريع إذا توفرت المشتقة	أبطأ ويحتاج لتنظيم
🔄 التعويض العكسي	نعيد u إلى x في النهاية	لا نحتاج تعويض (الناتج بدلالة x)
📊 جدول أو طريقة مساعدة	لا يوجد، يعتمد على المهارة	طريقة الجدول (صـ 64) للتكرار
💡 حالات فشل الطريقة	إذا لم نجد مشتقة الاقتران الداخلي	إذا أصبح التكامل أكثر تعقيداً
🧩 الدمج مع طرق أخرى	يمكن دمجه مع الأجزاء (صـ 68)	يمكن دمجه مع التعويض (صـ 68)
📖 الصفحات في الكتاب	صـ 26 - 44	صـ 58 - 71

📌 قواعد الاختيار الأساسية

متى نستخدم كل طريقة؟

🔁 التكامل بالتعويض

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

- ✅ **وجود اقتران ومشتقته** - مثلاً x مع x^2، $\cos x$ مع $\sin x$
- ✅ **وجود جذر تربيعي أو تكعيبي** - مثل $\sqrt{ax+b}$، $\sqrt[3]{x}$
- ✅ **صورة** $\frac{f'(x)}{f(x)}$ - تعطي $\ln|f(x)|$ مباشرة
- ✅ **اقتران مثلثي بأس فردي** - نحتفظ بواحد و نعوض الباقي
- ✅ **وجود** $e^{f(x)}$ **مع** $f'(x)$ - مثل $e^{x^2} \cdot 2x$
- ✅ **تكاملات تحتوي على** $\frac{1}{ax+b}$ - تعطي لوغاريتم

✂️ التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- ✅ **حاصل ضرب اقترانين مختلفين** - مثل $x\sin x$، xe^x
- ✅ **وجود** $\ln x$ - نختاره u دائماً (L في LIATE)
- ✅ **كثير حدود × أُسّي** - مثل $x^n e^{ax}$ (نختار $u = x^n$)
- ✅ **كثير حدود × مثلثي** - مثل $x^n \sin(ax)$، $x^n \cos(ax)$
- ✅ **تكاملات دورية** - مثل $e^{ax}\sin(bx)$، $e^{ax}\cos(bx)$
- ✅ **عكسية أو لوغاريتمية مع كثير حدود** - مثل $x^n \ln x$

🔁 أسئلة التكامل بالتعويض (22 سؤالاً)

صـ 9 - 44

صـ 9 - مثال 1/1 **تعويض**

$$\int 2e^{4x+3}dx$$

لماذا تعويض؟

الاقتران الأُسي e^{4x+3} ومشتقة الأس 4 موجودة كعامل ثابت. نعوض $u = 4x + 3$

#أسي #مشتقة_داخلية

صـ 9 - مثال 1/2 **تعويض**

$$\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3)dx$$

لماذا تعويض؟

الجزء الأسي e^{-3x} يحتاج تعويض $u = -3x$، والجزء الثاني x^3 تكامل مباشر.

#أسي #محدود

صـ 9 - مثال 1/3 **تعويض**

$$\int \sqrt{e^{x+1}}dx$$

لماذا تعويض؟

نبسط أولاً: $\sqrt{e^{x+1}} = e^{\frac{x+1}{2}}$، ثم نعوض $u = \frac{x+1}{2}$ للتخلص من الأس المعقد.

#أسي #جذور

صـ 10 - أتحقق **تعويض**

$$\int (5x^2 - 3e^{7x})dx$$

لماذا تعويض؟

الجزء e^{7x} يحتاج تعويض $u = 7x$، والجزء $5x^2$ تكامل مباشر.

#أسي #قوى

صـ 10 - أتحقق **تعويض**

$$\int \sqrt{e^{1-x}}dx$$

لماذا تعويض؟

نبسط: $\sqrt{e^{1-x}} = e^{\frac{1-x}{2}}$، نعوض $u = \frac{1-x}{2}$

#أسي #جذور

صـ 12 - مثال 2/1 **تعويض**

$$\int 2\sin(4x + 3)dx$$

لماذا تعويض؟

اقتران مثلثي بزاوية داخلية $4x+3$، مشتقة الزاوية 4 موجودة كعامل ثابت. نعوض $u=4x+3$

#مثلثي #زاوية_داخلية

صـ 12 - مثال 2/3 **تعويض**

$$\int_0^{\pi/12} \sec^2 3x\,dx$$

لماذا تعويض؟

$\sec^2(3x)$ مع زاوية داخلية $3x$، مشتقة الزاوية 3 موجودة. نعوض $u=3x$

#مثلثي #محدود

صـ 13 - مثال 3/1 **تعويض**

$$\int \tan^2 2x\,dx$$

لماذا تعويض؟

نستخدم متطابقة $\tan^2 2x=\sec^2 2x-1$، ثم نعوض $u=2x$ للجزء $\sec^2 2x$.

#مثلثي #متطابقات

صـ 15 - مثال 4/2 **تعويض**

$$\int \frac{1}{4x-1}\,dx$$

لماذا تعويض؟

صورة $\frac{1}{ax+b}$، نعوض $u = 4x - 1$ لتصبح $\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{4}$

#نسبي #لوغاريتم

صـ 15 - مثال 4/4 **تعويض**

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

لماذا تعويض؟

البسط $2x$ هو مشتقة المقام $x^2 - 1$، إذن هي صورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$، نعوض $u = x^2 - 1$

#f'_f #لوغاريتم

صـ 15 - مثال 4/5 **تعويض**

$$\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx$$

لماذا تعويض؟

البسط $6x$ هو 3 × (مشتقة المقام $2x$)، إذن هي صورة $k\frac{f'(x)}{f(x)}$، نعوض $u = x^2 + 9$

#f'_f #لوغاريتم

صـ 16 - مثال 4/6 **تعويض**

$$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx$$

لماذا تعويض؟

البسط $\cos x$ هو مشتقة $\sin x$ الموجود في المقام (مع ثابت). نعوض $u = 3 + 2\sin x$

#مثلثي #f'_f

صـ 16 - أتحقق **تعويض**

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$$

لماذا تعويض؟

البسط $2x + 3$ هو مشتقة المقام $x^2 + 3x$، إذن صورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$، نعوض $u = x^2 + 3x$

#f'_f

صـ 16 - أتحقق **تعويض**

$$\int \frac{e^x}{e^x+7}\,dx$$

لماذا تعويض؟

البسط e^x هو مشتقة المقام $e^x + 7$، إذن صورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$، نعوض $u = e^x + 7$

#f'_f #أسي

صـ 28 - مثال 1/1 **تعويض**

$$\int 6x^2(2x^3-3)^4dx$$

لماذا تعويض؟

المشتقة $6x^2$ موجودة خارج القوس، وهي مشتقة $2x^3-3$. نعوض $u=2x^3-3$

#قوى #مشتقة_داخلية

صـ 28 - مثال 1/2 **تعويض**

$$\int \sin x e^{\cos x}dx$$

لماذا تعويض؟

$\sin x$ هو مشتقة $\cos x$ (بالإشارة). نعوض $u=\cos x$

#أسي #مثلثي

صـ 28 - مثال 1/3 **تعويض**

$$\int \frac{\ln x}{x}dx$$

لماذا تعويض؟

$\frac{1}{x}$ هي مشتقة $\ln x$. نعوض $u=\ln x$

#لوغاريتم #مشتقة

صـ 29 - مثال 1/4 **تعويض**

$$\int x^3 \cos(x^4 - 5)dx$$

لماذا تعويض؟

x^3 هي ربع مشتقة $x^4 - 5$ (مشتقتها $4x^3$). نعوض $u = x^4 - 5$

#مثلثي #مشتقة

صـ 29 - مثال 1/5 **تعويض**

$$\int \sin^3 2x \cos 2x dx$$

لماذا تعويض؟

$\cos 2x$ هو مشتقة $\sin 2x$ (مقسومة على 2). نعوض $u = \sin 2x$

#مثلثي #أس_فردي

صـ 30 - مثال 2/1 **تعويض**

$$\int x\sqrt{2x + 5}dx$$

لماذا تعويض؟

وجود جذر $\sqrt{2x+5}$، نعوض $u = 2x+5$ للتخلص من الجذر.

#جذور

صـ 31 - مثال 2/2 **تعويض**

$$\int x^5(1+x^2)^3 dx$$

لماذا تعويض؟

نعوض $u = 1+x^2$، ثم نكتب $x^5 = x \cdot x^4 = x \cdot (u-1)^2$

#قوى

صـ 32 - مثال 3/1 **تعويض**

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$$

لماذا تعويض؟

نعوض $u = e^x + 1$، ثم $e^{2x} = (u-1)^2$

#أسي

أسئلة التكامل بالأجزاء (18 سؤالاً) صـ 58 - 71

صـ 59 - مثال 1/1 **أجزاء**

$$\int x\cos x dx$$

لماذا أجزاء؟

حاصل ضرب اقترانين مختلفين: كثير حدود x ومثلثي $\cos x$. نختار $u = x$ (يبسط بالاشتقاق) و $dv = \cos x dx$

#كثير_حدود #مثلثي

صـ 60 - مثال 1/2 **أجزاء**

$$\int \ln x dx$$

لماذا أجزاء؟

وجود $\ln x$، نختاره u دائماً، و $dv = dx$. هذا هو المثال الأساسي للتكامل بالأجزاء.

#لوغاريتم

صـ 60 - مثال 1/3 **أجزاء**

$$\int x(2x+7)^5 dx$$

لماذا أجزاء؟

يمكن حله بالتعويض، لكن الكتاب استخدم الأجزاء: $u = x$ و $dv = (2x+7)^5 dx$. الأفضل هنا التعويض لكن الأجزاء تنجح أيضاً.

#كثير_حدود #قوى #بديل

صـ 61 - مثال 1/4 **أجزاء**

$$\int x e^{3-x} dx$$

لماذا أجزاء؟

كثير حدود x مضروب في أُسي e^{3-x}. نختار $u = x$، $dv = e^{3-x} dx$

#كثير_حدود #أسي

صـ 61 - أتحقق **أجزاء**

$$\int x^2 \ln x dx$$

لماذا أجزاء؟

وجود $\ln x$ مع كثير حدود x^2. نختار $u = \ln x$، $dv = x^2 dx$

#كثير_حدود #لوغاريتم

صـ 62 - مثال 2 **أجزاء (تكرار)**

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

لماذا أجزاء؟

كثير حدود x^2 مع أُسي. نحتاج تكرار الأجزاء مرتين (نخفض درجة x بالتدريج حتى تصفر).

#كثير_حدود #أسي #تكرار

صـ 63 - مثال 3 **أجزاء (دوري)**

$$\int e^x \cos x dx$$

لماذا أجزاء؟

أُسي × مثلثي، أي من النوع الدوري. نستخدم الأجزاء مرتين ونحصل على معادلة نجد منها قيمة التكامل.

#أسي #مثلثي #دوري

صـ 64 - أتحقق **أجزاء (دوري)**

$$\int \frac{\sin x}{e^x} dx = \int e^{-x} \sin x dx$$

لماذا أجزاء؟

أُسي × مثلثي، تكامل دوري. نستخدم الأجزاء مرتين.

#أسي #مثلثي #دوري

صـ 64 - أتحقق **أجزاء**

$$\int \sec^3 x dx$$

لماذا أجزاء؟

نكتب $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$، نختار $u = \sec x$ و $dv = \sec^2 x dx$، نحصل على معادلة.

#مثلثي #قوى

صـ 65 - مثال 4 **أجزاء (جدول)**

$$\int x^3 \sin x dx$$

لماذا أجزاء؟

كثير حدود من الدرجة 3 مع مثلثي. نستخدم طريقة الجدول لتسهيل التكرار (صـ 65).

#كثير_حدود #مثلثي #جدول

صـ 65 - أتحقق **أجزاء (جدول)**

$$\int x^4 \cos 4x dx$$

لماذا أجزاء؟

كثير حدود من الدرجة 4 مع مثلثي. نستخدم طريقة الجدول لتسهيل التكرار.

#كثير_حدود #مثلثي #جدول

صـ 67 - مثال 6 **أجزاء (محدود)**

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx$$

لماذا أجزاء؟

وجود $\ln x$ مع كثير حدود. نختار $u = \ln x$، $dv = x^3 dx$

#لوغاريتم #محدود

صـ 68 - أتحقق **أجزاء**

$$\int_0^1 x e^{-2x} dx$$

لماذا أجزاء؟

كثير حدود x مع أُسي e^{-2x}. نختار $u = x$، $dv = e^{-2x} dx$

#كثير_حدود #أسي #محدود

صـ 69 - جدول **أجزاء**

$$\int x \ln x dx$$

لماذا أجزاء؟

$\ln x$ مع كثير حدود، نختار $u = \ln x$، $dv = xdx$

#لوغاريتم

صـ 69 - جدول **أجزاء**

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

لماذا أجزاء؟

كثير حدود مع أُسي، نحتاج تكرار الأجزاء مرتين.

#كثير_حدود #أسي

صـ 69 - جدول **أجزاء**

$$\int x^{2/3} \ln x dx$$

لماذا أجزاء؟

وجود $\ln x$، نختاره u، و $dv = x^{2/3}dx$

#لوغاريتم #قوى

صـ 70 - تمرين 4 **أجزاء**

$$\int x \ln(1+x) dx$$

لماذا أجزاء؟

وجود $\ln(1+x)$، نختاره u، و $dv = xdx$

#لوغاريتم

صـ 70 - تمرين 13 **أجزاء (دوري)**

$$\int e^{3x}\cos x dx$$

لماذا أجزاء؟

أُسي × مثلثي، تكامل دوري.

#أسي #مثلثي #دوري

أسئلة تحتاج تعويضاً ثم أجزاء (أو العكس)

حالات خاصة

صـ 68 - مثال 7 **تعويض ← أجزاء**

$$\int e^{\sqrt{x}}dx$$

لماذا تعويض أولاً؟

للتخلص من الجذر، نعوض $u = \sqrt{x}$، ثم نحصل على $2\int ue^u du$ الذي يحتاج أجزاء.

صـ 68 - أتحقق **تعويض ← أجزاء**

$$\int x^5 e^{x^2} dx$$

لماذا تعويض أولاً؟

نعوض $u = x^2$، ثم $du = 2xdx$، يصبح التكامل $\frac{1}{2}\int u^2 e^u du$ الذي يحتاج أجزاء.

صـ 68 - أتحقق **تعويض ← أجزاء**

$$\int (x^3 + x^5) \sin x^2 dx$$

لماذا تعويض أولاً؟

نعوض $u = x^2$، ثم $du = 2xdx$، نحصل على تكاملات تحتاج أجزاء.

صـ 54 - مثال 5/2 **تعويض ← كسور جزئية**

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x} dx$$

لماذا تعويض أولاً؟

نعوض $u = e^x$، ثم نستخدم الكسور الجزئية للتكامل الناتج $\int \frac{du}{u(u-1)}$.

صـ 54 - مثال 5/2 **تعويض ← كسور جزئية**

$$\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$$

لماذا تعويض أولاً؟

نعوض $u=\sqrt{x}$، ثم نستخدم الكسور الجزئية.

أمثلة مقارنة: نفس التكامل بطريقتين

تحليل الخيارات

مثال 1: $\int xe^{x^2}dx$

بالتعويض أنجح: $u=x^2$

بالأجزاء ممكن لكنه أطول

حل بالتعويض

مثال 2: $\int x\sin x dx$

بالأجزاء أنجح

بالتعويض لا ينفع

حل بالأجزاء

مثال 3: $\int e^x \sin x dx$

بالأجزاء (دوري)

بالتعويض لا ينفع

حل بالأجزاء

حالات خاصة: دمج الطريقتين (تعويض ثم أجزاء أو العكس)

صـ 68 - مثال 7

مثال: $\int e^{\sqrt{x}}dx$

هذا التكامل يحتاج أولاً إلى تعويض ثم أجزاء.

عرض الحل الكامل

مثال: $\int x^3\cos(x^2)dx$

عرض الحل

📊 ملخص تصنيف الأسئلة حسب السبب

سبب استخدام التعويض	عدد الأسئلة	سبب استخدام الأجزاء	عدد الأسئلة
وجود مشتقة داخلية واضحة	8	كثير حدود × مثلثي	4
صورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$	6	كثير حدود × أُسي	5
وجود جذور	3	وجود $\ln x$	6
اقتران مثلثي بأس فردي	2	تكاملات دورية (أسي × مثلثي)	3
اقتران أُسي مع مشتقته	3	تكرار الأجزاء (درجة عالية)	3

🧭 خريطة القرار: تعويض أم أجزاء؟

📌 خلاصة ذهبية

🔁 **اختر التعويض** عندما ترى: مشتقة داخلية، جذر، $\frac{f'}{f}$، أس فردي لمثلثي، أو $\frac{1}{ax+b}$.

✂️ **اختر الأجزاء** عندما ترى: حاصل ضرب اقترانين (كثير حدود × مثلثي/أسي)، وجود $\ln x$، تكاملات دورية.

🔗 **بعض التكاملات** تحتاج الطريقتين معاً: تعويض أولاً ثم أجزاء (مثل $e^{\sqrt{x}}$).

📚 **تذكر ترتيب LIATE** للأجزاء: لوغاريتمي، معكوس مثلثي، جبري، مثلثي، أُسي.

جميع الأسئلة مأخوذة من كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر - المركز الوطني لتطوير المناهج، الأردن

إعداد: د. أيمن القهوجي - 2025